PELABELAN $P_2 \rhd C_n$ AJAIB SUPER DARI GRAF $C_m \rhd C_n$

Gita N.A. Ginting, Jusrry R. Pahnael, Ganesha L. Putra
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia

Email Penulis Korespondensi: gitanaftaliandiryani@gmail.com

Abstrak
Misalkan $G = (V, E)$ dikatakan memuat selimut H jika untuk setiap sisi dari $e \in E(G)$ termuat dalam suatu subgraf dari G yang isomorfik terhadap H. Selanjutnya graf G yang memuat selimut-H dikatakan H-ajaib jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ sehingga untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfik terhadap H berlaku $f(H') = \sum_{(v \in V)} f(v) + \sum_{(e \in E)} f(e) = k$, dengan k adalah bilangan ajaib. Selanjutnya, graf G disebut H-ajaib super jika $f(V) = \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$. Misalkan graf G dan H adalah graf terhubung yang memuat x sebagai titik dari graf H. Hasil kali sisir antara graf G dan H, dinotasikan $G \rhd H$, merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf G dan salinan sebanyak $|V(G)|$ dari graf H, kemudian menyatukan titik x pada graf H ke-i dengan titik ke-i pada graf G. Pada skripsi ini diberikan konstruksi pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$ untuk $m \geq 3, m$ ganjil, $n \geq 3,\ m, n \in N$.

Kata kunci : graf siklus, pelabelan h-ajaib super, operasi hasil kali sisir.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang ilmu yang dikembangkan pada awal abad ke delapan belas. Perkembangan cabang ilmu ini sangat pesat. Hal ini disebabkan karena teori graf dapat menyelesaikan berbagai masalah dalam ilmu pengetahuan. Konsep graf dapat digunakan dalam bidang kedokteran dan biologi, seperti menjelaskan kode genetika makhluk hidup, bidang sejarah untuk keperluan analisis arkeologi, bidang manajemen untuk masalah penjadwalan, dan bidang komputer untuk pengembangan jaringan dan pewarnaan peta.

Graf G terdiri dari pasangan terurut $G = (V, E)$ dimana V adalah himpunan tak kosong dari objek yang disebut titik dan E adalah himpunan yang anggotanya dibentuk oleh dua titik yang disebut sisi. Biasanya, himpunan titik dan sisi pada graf secara berturut-turut juga dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Adapun $|V(G)|$ adalah banyaknya titik dan $|E(G)|$ adalah banyaknya sisi pada graf G. Graf lintasan, dinotasikan dengan P_n, $n \geq 2$, merupakan graf dengan n titik dan diberi label $v_1, v_2, \dots, v_n$ sehingga sisi-sisinya adalah $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Jika $n = 1$, maka graf P_1 merupakan graf dengan satu titik. Titik v_1 dan v_n dinamakan titik ujung. Suatu graf dikatakan graf terhubung jika untuk setiap dua titik $u, v \in V$, terdapat lintasan dari u ke v (Chartrand dan Zhang, 2012).

Misalkan graf G dan H adalah graf terhubung yang memuat x sebagai titik dari graf H. Hasil kali sisir antara graf G dan H, dinotasikan $G \rhd H$, artinya mengambil satu salinan dari graf G dan salinan sebanyak $|V(G)|$ dari graf H dengan cara memasangkan salinan ke$-i$ dari graf H ke titik ke$-i$ pada graf G. Berdasarkan definisi hasil kali sisir pada dua graf, dapat dikatakan bahwa $V(G \rhd H) = \{(a, v) | a \in V(G), v \in V(H)\}$ dan $(a, v)(b, w) \in E(G \rhd H)$ jika $a = b$ serta $vw \in E(H)$, atau $ab \in E(G)$ dan $v = w = x$ ([4]).

Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan memuat selimut H jika untuk setiap $e \in E(G)$ termuat dalam suatu subgraf dari G yang isomorfik terhadap H. Selanjutnya graf G yang memuat selimut-H dikatakan H-ajaib jika memuat fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ sehingga untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H berlaku $f(H') =$

$\sum_{(v \in V)} f(v) + \sum_{(e \in E)} f(e) = k$ dengan k adalah bilangan ajaib. Selanjutnya, graf G disebut H-ajaib super jika $f(V) = \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$.

Pada [2], telah dibuktikan bahwa graf W_n adalah C_3-ajaib super untuk $n \geq 5$, n ganjil. [2] juga telah membuktikan bahwa jika G graf ajaib super bebas (C_4) maka $G \times K_2$ adalah C_4 ajaib super. Selanjutnya, [2] telah membuktikan P_n – ajaib super dari graf bintang dan graf pisang. Melanjutkan dari hasil yang ada, maka penelitian ini memaparkan hasil mengenai pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$.

Tujuan

Tujuan dari kajian ini adalah untuk mengkonstruksi pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$.

2. METODE KAJIAN

2.1 Desain Kajian

Penulisan ini menggunakan metode studi literatur, yaitu menghimpun beberapa sumber referensi dan dibuat suatu kajian khusus mengenai pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$.

2.2 Prosedur Kajian

Adapun langkah-langkah kajian pelabelan graf :

1. Memaparkan definisi dari konsep dasar tentang graf, hasil kali sisir dari suatu graf, pelabelan graf, serta konsep-konsep matematika yang mendukung kajian pelabelan graf.
2. Mendefinisikan dan membuktikan teorema-teorema terkait pelabelan graf.
3. Menentukan pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Multi-himpunan Seimbang

Multi-himpunan merupakan modifikasi dari himpunan yang mengijinkan unsur yang sama muncul lebih dari satu kali. Misalkan $m \in$ N dan X multi-himpunan dari bilangan bulat positif. X dikatakan multi-himpunan k-seimbang jika terdapat himpunan bagian X , $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ sehingga untuk setiap $h \in [1, k]$, $|X_h| = \frac{|X|}{k}$, $\sum X_h = \frac{\sum X}{k} \in$ N , dan $\uplus_{h=1}^{k} X_h = X$. X_h disebut subhimpunan seimbang dari X. Selanjutnya diberikan beberapa lemma terkait multi-himpunan k-seimbang.

Lemma 3.1.1 *Misalkan* $\boldsymbol{m, n} \in \boldsymbol{N}$ *dan* $\boldsymbol{1 \leq h \leq m}$*, maka multi-himpunan* $\boldsymbol{X = 2[1, 2mn] \uplus [2mn+1, 2mn+m]}$ *adalah* $\boldsymbol{m}$*-seimbang.*

Bukti :

Pertama akan ditunjukkan bahwa X_h adalah multi-himpunan yang seimbang dengan syarat bahwa untuk setiap $h \in [1, m]$, $|X_h| = \frac{|X|}{m}$, $\sum X_h = \frac{\sum X}{m} \in$ N , dan $\uplus_{h=1}^{m} X_h = X$. Pembuktian ini terbagi atas dua kasus.

Kasus 1 : n ganjil

Bentuk $X_h = \{a_{h \bmod{*} m}, a_{(h+1) \bmod{*} m}, b^1_{h \bmod{*} m}, \ldots, b^{n-1}_{h \bmod{*} m}, b^1_{(h+1) \bmod{*} m}, \ldots,$

$$b^{n-1}_{(h+1)mod*m}, c^{1}_{h\,mod*m}, \dots, c^{n}_{h\,mod*m}, c^{1}_{(h+1)mod*m}, \dots, c^{n}_{(h+1)mod*m}, d_h\}$$

dengan,

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{h+1}{2}, & h\ ganjil\ \in\ [1, m] \\ \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{h}{2}, & h\ genap\ \in\ [1, m] \end{cases}$$

$$b^{j}_{h} = \begin{cases} (j+1)m + 1 - h, & \begin{matrix} h\ \in [1, m] \\ j\ ganjil\ \in [1, n-1] \end{matrix} \\ jm + h, & \begin{matrix} h\ \in [1, m] \\ j\ genap\ \in\ [1, n-1] \end{matrix} \end{cases}$$

$$c^{k}_{h} = \begin{cases} mn + mk + 1 - h, & \begin{matrix} h\ \in\ [1, m] \\ k\ ganjil\ \in\ [1, n] \end{matrix} \\ mn + (k-1)m + h\,, & \begin{matrix} h\ \in\ [1, m] \\ k\ genap\ \in\ [1, n] \end{matrix} \end{cases}$$

$$d_h = 2mn + h\,, \qquad h\ \in\ [1, m]$$

$$|X_h| = 4n + 1$$

$$\sum X_h = n\,(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$$

Kasus 2 : n genap

Bentuk $X_h = \{a_{h\,mod*m}, a_{(h+1)mod*m}, b^{1}_{h\,mod*m}, \dots, b^{n-1}_{h\,mod*m}, b^{1}_{(h+1)mod*m}, \dots,$

$$b^{n-1}_{(h+1)mod*m}, c^{1}_{h\,mod*m}, \dots, c^{n}_{h\,mod*m}, c^{1}_{(h+1)mod*m}, \dots, c^{n}_{(h+1)mod*m}, d_h$$

dengan,

$$a_h = \begin{cases} \dfrac{h+1}{2}, & h\ ganjil\ \in\ [1, m] \\ \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{h}{2}, & h\ genap\ \in\ [1, m] \end{cases}$$

$$b^{j}_{h} = \begin{cases} (j+1)m + 1 - h, & \begin{matrix} h\ \in [1, m] \\ j\ ganjil\ \in [1, n-1] \end{matrix} \\ jm + h, & \begin{matrix} h\ \in [1, m] \\ j\ genap\ \in\ [1, n-1] \end{matrix} \end{cases}$$

$$c^{k}_{h} = \begin{cases} (mn + h) + (k-1)m, & \begin{matrix} h\ \in\ [1, m] \\ k\ ganjil\ \in\ [1, n] \end{matrix} \\ (mn + 1) - h + km\,, & \begin{matrix} h\ \in\ [1, m] \\ k\ genap\ \in\ [1, n] \end{matrix} \end{cases}$$

$$d_h = 2mn + h\,, \qquad h\ \in\ [1, m]$$

$$|X_h| = 4n + 1$$

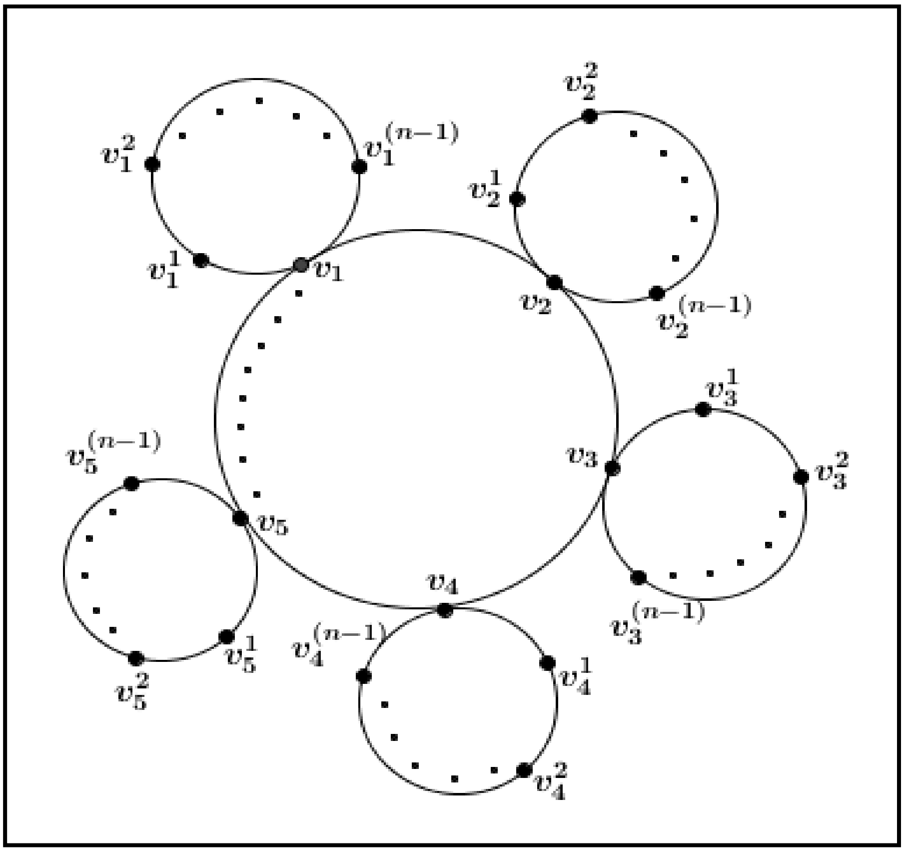
$$\sum X_h = n\,(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\frac{\sum \boldsymbol{X}}{\boldsymbol{m}} = n(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$ dan $\frac{|X|}{m} = 4n + 1$ dan $\uplus_{h=1}^{m} X_h = X$.

- $\frac{\sum \boldsymbol{X}}{\boldsymbol{m}} = n(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$
- $\frac{|X|}{\boldsymbol{m}} = \frac{4mn+m}{m} = 4n + 1 = |X_h|$
- $\uplus_{\boldsymbol{h=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{X_h} = 2[1{,}2mn] \uplus [2mn + 1{,}2mn + m] = \boldsymbol{X}$

3.2 Pelabelan $P_2 \rhd C_n$ Ajaib Super dari Graf $C_m \rhd C_n$

Graf $P_2 \rhd C_n$ merupakan ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$ dimana m dan n menyatakan banyaknya graf C_m dan C_n, P_2 menyatakan graf lintasan dengan titik sebanyak dua. Banyaknya titik dan sisi secara berturut-turut dari graf C_m dan C_n adalah mn dan $m(n + 1)$. Pada Gambar 3.1 diberikan label titik dan sisi dari graf $C_m \rhd C_n$.



Gambar 3.1 $\boldsymbol{C_m \rhd C_n}$

$V(C_m \rhd C_n) = \{v_h | 1 \le h \le m\} \cup \{v_h^j \mid 1 \le j \le n-1; 1 \le h \le m\}$

$E(C_m \rhd C_n\} = \{e_h | 1 \le h \le m\} \cup \{e_h^k \mid 1 \le k \le n; 1 \le h \le m\}$

Dimana $e_h = v_h v_{(h+1) mod m}$dan $e_h^k = \begin{cases} v_h v_h^1 & ; k = 1 \\ v_h^{k-1} v_h^k & ; 2 \le k \le n-1 \\ v_h^{n-1} v_h & ; k = n \end{cases}$

Berikut diberikan teorema mengenai pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super pada graf $C_m \rhd C_n$.

Teorema 3.2.1 *Graf $C_m \rhd C_n$ merupakan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super untuk $m \ge 3, n \ge 3, m, n \in N, m$ ganjil.*

Bukti :

Diberikan fungsi pelabelan untuk graf $C_m \rhd C_n$. Pelabelan ini dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1 : n ganjil

$$f(v_h) = \begin{cases} \dfrac{(h+1)}{2}, & h \text{ ganjil } \in [1, m] \\ \dfrac{(m+1)}{2} + \dfrac{h}{2}, & h \text{ genap } \in [1, m] \end{cases}$$

$$f(e_h) = 2mn + h, \qquad h \in [1, m]$$

$$f(v_h^j) = \begin{cases} (j+1)m + 1 - h, & h \in [1, m],\ j \text{ ganjil } \in [1, n-1] \\ jm + h, & h \in [1, m],\ j \text{ genap } \in [1, n-1] \end{cases}$$

$$f(e_h^k) = \begin{cases} mn + mk + 1 - h, & h \in [1, m],\ k \text{ ganjil } \in [1, n] \\ mn + (k-1)m + h, & h \in [1, m],\ k \text{ genap } \in [1, n] \end{cases}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.1 terlihat bahwa jika $f(v_h) = a_h, f(v_j^h) = b_h^j, f(e_h^k) = c_h^k, f(e_h) = d_h$. Perhatikan himpunan $X_h; 1 \le h \le m$ pada bukti Kasus 1 Lemma 3.1.1. Anggota himpunan X_h merupakan label titik dan sisi dari graf $P_2 \rhd C_n$ yang merupakan subgraf dari graf $C_m \rhd C_n$. Kemudian perhatikan juga bahwa jumlah label titik dan sisi dari setiap subgraf $P_2 \rhd C_n$ pada graf $C_m \rhd C_n$ sama, yaitu $n(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$.

Perhatikan partisi fungsi berikut.

1. $f(\{v_h | 1 \le h \le m\}) = [1, m]$,
2. $f(\{e_h | 1 \le h \le m\}) = [2mn + 1, 2mn + m]$,
3. $f(\{v_h^j | 1 \le j \le n-1; 1 \le h \le m\}) = [m + 1, mn]$,
4. $f(\{e_h^k | 1 \le k \le n; 1 \le h \le m\}) = [mn + 1, 2mn]$

Masing-masing partisi merupakan fungsi bijektif dan memiliki daerah hasil yang tidak saling beririsan. Kemudian perhatikan bahwa :

$$|V \cup E| = 2mn + m = \left| \begin{matrix} [1, m] \cup [m + 1, mn] \cup \\ [mn + 1, 2mn] \cup [2mn + 1, 2mn + m] \end{matrix} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{c} f(\{v_h | 1 \leq h \leq m\}) \cup \\ f\left(\{v_h^j | 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq h \leq m\}\right) \cup \\ f\left(\{e_h^k | 1 \leq k \leq n; 1 \leq h \leq m\}\right) \cup \\ f(\{e_h | 1 \leq h \leq m\}) \end{array} \right|$$
$$= |f(V \cup E)|$$

dengan $2mn + m$ merupakan banyaknya titik dan sisi dari graf $C_m \rhd C_n$. Akibatnya, f merupakan fungsi bijektif.

Kasus 2 : n genap

$$f(v_h) = \begin{cases} \dfrac{(h+1)}{2}, & h \ ganjil \ \in [1, m] \\ \dfrac{(m+1)}{2} + \dfrac{h}{2}, & h \ genap \ \in [1, m] \end{cases}$$

$$f(e_h) = 2mn + h, \qquad h \in [1, m]$$

$$f(v_j^h) = \begin{cases} (j+1)m + 1 - h, & \begin{array}{c} h \in [1, m] \\ j \ ganjil \ \in [1, n-1] \end{array} \\ jm + h, & \begin{array}{c} h \in [1, m] \\ j \ genap \ \in [1, n-1] \end{array} \end{cases}$$

$$f(e_h^k) = \begin{cases} (mn + h) + (k-1)m, & \begin{array}{c} h \in [1, m] \\ k \ ganjil \ \in [1, n] \end{array} \\ (mn + 1) - h + mk, & \begin{array}{c} h \in [1, m] \\ k \ genap \ \in [1, n] \end{array} \end{cases}$$

Berdasarkan Lemma 3.1.1 terlihat bahwa jika $f(v_h) = a_h$, $f(v_j^h) = b_h^j$, $f(e_h^k) = c_h^k$, $f(e_h) = d_h$. Perhatikan himpunan $X_h; 1 \leq h \leq m$ pada bukti Kasus 2 Lemma 3.1.1. Anggota himpunan X_h merupakan label titik dan sisi dari graf $P_2 \rhd C_n$ yang merupakan subgraf dari graf $C_m \rhd C_n$. Kemudian perhatikan juga bahwa jumlah label titik dan sisi dari setiap subgraf $P_2 \rhd C_n$ pada graf $C_m \rhd C_n$ sama, yaitu $n(4mn + m + 2) + \frac{1}{2}(2mn + m + 1)$.

Perhatikan partisi fungsi berikut.

1. $f(\{v_h | 1 \leq h \leq m\}) = [1, m]$,
2. $f(\{e_h | 1 \leq h \leq m\}) = [2mn + 1, 2mn + m]$,
3. $f\left(\{v_h^j | 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq h \leq m\}\right) = [m + 1, mn]$,
4. $f\left(\{e_h^k | 1 \leq k \leq n; 1 \leq h \leq m\}\right) = [mn + 1, 2mn]$

Masing-masing partisi merupakan fungsi bijektif dan memiliki daerah hasil yang tidak saling beririsan. Kemudian perhatikan bahwa

$$|V \cup E| = 2mn + m = \left| \begin{array}{c} [1, m] \cup [m + 1, mn] \cup \\ [mn + 1, 2mn] \cup [2mn + 1, 2mn + m] \end{array} \right|$$
$$= \left| \begin{array}{c} f(\{v_h | 1 \leq h \leq m\}) \cup \\ f\left(\{v_h^j | 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq h \leq m\}\right) \cup \\ f\left(\{e_h^k | 1 \leq k \leq n; 1 \leq h \leq m\}\right) \cup \\ f(\{e_h | 1 \leq h \leq m\}) \end{array} \right|$$
$$= |f(V \cup E)|$$

dengan $2mn + m$ merupakan banyaknya titik dan sisi dari graf $C_m \rhd C_n$. Akibatnya, f merupakan fungsi bijektif.

4. KESIMPULAN

Dari penulisan yang dilaporkan dalam skripsi ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Graf $C_m \rhd C_n$ merupakan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super untuk $m \geq 3, n \geq 3, m, n \in$ N, m ganjil (Teorema 3.2.1).
2. Misalkan $m, n \in$ N dan $1 \leq h \leq m$. Maka multi-himpunan $X = 2[1\ , 2mn] \uplus [2mn + 1\ , 2mn + m]$ adalah m-seimbang (Lemma 3.1.1).

Penulisan ini dapat dilanjutkan dengan mencari apakah terdapat konstruksi pelabelan $P_2 \rhd C_n$ ajaib super dari graf $C_m \rhd C_n$ untuk $m \geq 3, n \geq 3,\ m, n \in$ N, m genap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. dan Zhang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*. New York: McGraw Hill.

[2] Galian, J. A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling (20th ed.). *Electronic Journal of Combinatorics, 17#ds6.*

[3] Rosen, K. H. (2007). *Discrete Mathematics and its Application* (6th ed.). New York: McGraw Hill.

[4] Suhadi, W. S., Novi, M., Ira, A.P. (2017). *The Metric Dimension of Comb Product Graphs. MATEMATIK VESNIK* 69, 4 , 248-258.